ESTATÍSTICA I - 2º Ano/Economia, 2º semestre, Época Recurso 03.07. 17

2horas. (20 valores)

Nome:____**Turma:**_________

Espaço reservado para classificações					
1a.(10)	2a.(10)	3a (10).	4a.(10)	5a.(10)	6a.(10)
1b.(20)	2b.(20)	3b (15)	4b.(20)	5b.(20)	6b.(15)
		7.(15)	8.(15)	T:	

Atenção: todas as questões devem ser <u>devidamente formalizadas e justificadas</u>.

1. Nove em cada dez vezes que o Rui chega a casa do trabalho, não consegue estacionar na sua rua. Se chega depois das 18:30, nunca encontra lugar na sua rua; quando chega entre as 18:00 e as 18:30,apenas 20% das vezes encontra um lugar para estacionar na sua rua. Assuma que as probabilidades de o Rui chegar depois das 18:30 e entre as 18:00 e as 18:30 são, respectivamente, 0.2 e 0.1.

a1) Em quinze dias seleccionados ao acaso, qual a probabilidade de o Rui não conseguir estacionar na sua rua em mais de 10 dias?

0,9978 ☐ 0,9873 X 0,9895 ☐ 0,9981 ☐

a2) Em quinze dias seleccionados ao acaso, qual a probabilidade de o Rui não conseguir estacionar na sua rua em 10 ou mais dias?

0,9978 X 0,9873 ☐ 0,9895 ☐ 0,9981 ☐

b) Ontem o Rui não conseguiu estacionar na sua rua. Qual a probabilidade de ter chegado a casa antes das 18:00?

NE – não estacionar; A_1– depois das 18:30, A_2- entre as 18:00 e as 18:30 , A_3- antes das 18:00

$P(A_1) = 0.2;\ P(A_2) = 0.1;\ P(A_3) = 0.7;\ P(NE) = 0.9;\ P(NE|A_1) = 1$

$P(\overline{NE}|A_2) = 0.2 \Rightarrow P(NE|A_2) = 1 - P(\overline{NE}|A_2) = 0.8$

$$P(A_3|NE) = \frac{P(A_3 \cap NE)}{P(NE)} = \frac{0.62}{0.9} = 0.6889$$

	P(Ai)	P(NE|Ai)	$P(NE \cap Ai)$	P(Ai|NE)
A_1	**0,2**	**1**	0.2	
A_2	**0,1**	**0,8**	0,08	
A_3	**0,7**		0,62	
			0,9	

$P(NE \cap A_3) = 0.9 - [P(NE|A_1) * P(A_1) + P(NE|A_2) * P(A_2)] = 0.88$

2. Considere a variável aleatória bidimensional (X,Y) com função probabilidade conjunta dada pela tabela seguinte:

$x \quad \backslash \quad y$	0	1	2
0	0,298	0,298	0,149
1	0,047	0,094	0,094
2	0,002	0,007	0,011

a) Sobre as variáveis X e Y podemos afirmar que:

i) Têm a mesma distribuição de probabilidades ☐ ii) $P(X = Y) = 0{,}403$ X

iii) $E[Y] = 1$ ☐ iv) $P(Y = 2) = 0{,}02$ ☐

b) Determine a função de distribuição da variável aleatória $Z = |X - Y|$.

$x \quad \backslash \quad y$	0	1	2
0	0	1	2
1	1	0	1
2	2	1	0

$$A_0 = \{(x,y): Z = 0\} = \{(0{,}0),(1{,}1),(2{,}2)\} \Rightarrow P(Z = 0) = P(0{,}0) + P(1{,}1) + P(2{,}2) = 0.403$$

$$A_1 = \{(x,y): Z = 1\} = \{(0{,}1),(1{,}0),(1{,}2),(2{,}1)\} \Rightarrow P(Z = 1) = P(0{,}1) + P(1{,}0) + P(1{,}2) + P(2{,}1) = 0.446$$

$$A_2 = \{(x,y): Z = 2\} = \{(0{,}2),(2{,}0)\} \Rightarrow P(Z = 2) = P(0{,}2) + P(2{,}0) = 0.151$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z < 0 \\ 0.403 & 0 \le z < 1 \\ 0.849 & 1 \le z < 2 \\ 1 & z \ge 2 \end{cases}$$

3. Seja X uma variável aleatória cuja função densidade de probabilidade é dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} x & (0 < x < 1) \\ \frac{1}{2} & (1 < x < 2) \end{cases}$$

a) Sobre a distribuição de X podemos afirmar que:

i) é simétrica ☐ ii) a sua mediana é 1 X

iii) $P(X < 2) = \frac{1}{2}$ ☐ iv) é discreta ☐

b) Calcule a variância de $Y = 2X + 3$.

$$Var(Y) = Var(2X + 3) = 4Var(X) = 4 * 0.2431 = 0.9722$$

$$Var(X) = E(X^2) - \mu_X{}^2 = \frac{17}{12} - \left(\frac{13}{12}\right)^2 = \frac{35}{144} = 0.2431$$

$$E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 * f_X(x)dx = \int_0^1 x^2 * x\, dx + \int_1^2 x^2 * \frac{1}{2} dx = \frac{17}{12}$$

4. A chegada de clientes ao balcão de uma certa loja por hora, entre as 10 e as 18 horas, segue uma distribuição de Poisson com desvio padrão igual a 10.

a1) Qual a probabilidade de nas duas primeiras horas chegarem 15 ou mais clientes.

0.9613 ☐ 0.8951 X 0.9484☐ 0.8435 ☐

a2) Qual a probabilidade de nas duas primeiras horas chegarem mais de 15 clientes.

0.9613 ☐ 0.8951 ☐ 0.9484 ☐ 0.8435 X

b)Qual a probabilidade de se ter de esperar mais de meia hora pela chegada do 3º cliente?

X- nº clientes que chegam ao balcão numa hora$\sim Po(10)$

Y- tempo, em horas, entre chegadas consecutivas de clientes$\sim Ex(10)$

W- tempo, em horas, até chegada do 3º cliente$\sim G(3,10) \Rightarrow 2\boldsymbol{\lambda W}\sim\boldsymbol{\chi^2_{(6)}}$

$$P\left(W>\frac{1}{2}\right)=P\left(2\boldsymbol{\lambda W}=2*10*\frac{1}{2}\right)=P\left(\boldsymbol{\chi^2_{(6)}}>10\right)=0.1247$$

5. O Daniel é treinador de natação e assegura-nos que o tempo (em segundos) que o seu melhor atleta consegue obter em competição nos 50 m bruços é bem modelado por uma variável aleatória com média 35 e desvio padrão 2. Sempre que o tempo obtido é inferior a 31 segundos, o atleta recebe um prémio de 100 euros.

a) Sobre a distribuição da média dos tempos que esse atleta obtém em 5 competições distintas de 50 m bruços, selecionadas aleatoriamente, podemos afirmar que:

i) pode ser bem aproximada por uma normal ☐ ii) tem valor médio 35 X

iii) tem variância 4 ☐ iv) tem desvio padrão igual a 2/5 ☐

b) Qual o montante a orçamentar que garante com probabilidade de pelo menos 95% que se tem dinheiro para pagar ao atleta ao longo das próximas 50 competições de 50m bruços em que ele vai participar.

X- tempo (segs) que atleta consegue obter em competição nos 50 m bruços
Y- atleta recebe prémio$\sim B(1,\theta=P(X<31)=0.0228)$
$W=100*\sum_{i=1}^{50}Y_i$ – montante a orçamentar

$$k: P\left(100*\sum_{i=1}^{50}Y_i\le k\right)\ge 0.95 \Leftrightarrow P\left(\sum_{i=1}^{50}Y_i\le\frac{k}{100}\right)\ge 0.95\Leftrightarrow$$

$$P\left(\frac{\sum_{i=1}^{50}Y_i-n\theta}{\sqrt{n*\theta*(1-\theta)}}\le\frac{\frac{k}{100}-\frac{1}{2}-50*0.0228}{\sqrt{50*0.0228*(1-0.0228)}}\right)\ge 0.95$$

$$\Rightarrow z_\varepsilon=1.645\Leftrightarrow\frac{\frac{k}{100}-\frac{1}{2}-50*0.0228}{\sqrt{50*0.0228*(1-0.0228)}}=1.645\Leftrightarrow k>337$$

6. Assuma que o tempo (em horas) que um estudante a preparar-se para os exames nacionais passa diariamente a estudar tem uma distribuição normal de média 5 e desvio padrão 2. Em certo dia, selecionaram-se aleatoriamente 9 estudantes.

a) Qual a probabilidade de o tempo médio de estudo na amostra ser inferior a 4 horas?

$$\bar{X} \sim N\left(\mu_X, {\sigma^2}/{n}\right)$$

$$P(\bar{X} < 4) = normalcdf\left(-10000, 4, 5, {2}/{3}\right) = 0.0668$$

Ou

$$P(\bar{X} < 4) = P\left(\frac{\bar{X} - \mu_X}{{\sigma}/{\sqrt{n}}} < \frac{4-5}{{2}/{3}}\right) = P(Z < -1.5) = 1 - \boldsymbol{\phi(1.5)} = \mathbf{1 - 0.9332}$$

b) Qual a probabilidade de o menor tempo de estudo na amostra ser superior a 1 hora?

$(X_1, X_2, \cdots, X_9)$ é uma amostra casual.

$$P\left(X_{(1)} > 1\right) = 1 - P\left(X_{(1)} \leq 1\right) = 1 - G_{(1)}(1) = 1 - \{1 - [1 - F_x(1)]^9\} =$$

$$= [1 - F_x(1)]^9 = (1 - 0.0228)^9 = 0.8129$$

7. Sejam $\lambda > 0$ e $\theta > 0$. Seja ainda X uma v.a. cuja função de distribuição é dada por

$$F(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 1 - e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^\theta} & x > 0 \end{cases}$$

Determine a distribuição de $Y = \left(\frac{X}{\lambda}\right)^\theta$.

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P\left(\left(\frac{X}{\lambda}\right)^\theta \leq y\right) = P\left(X \leq \lambda \sqrt[\theta]{y}\right) = F_X\left(\lambda \sqrt[\theta]{y}\right) = 1 - \exp\left[-\left(\frac{\lambda \sqrt[\theta]{y}}{\lambda}\right)^\theta\right]$$

$$= \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 - e^{-y} & y > 0 \end{cases}$$

8. Considere as variáveis X e Y tais que $Z = X - Y$ e X são independentes. Existindo todos os valores esperados envolvidos, mostre que $Cov(X, Y) = Var(X)$

Como Z e Y são variáveis aleatórias independentes, tem-se:

$$E[(X - Y)X] = E[X^2 - X.Y] = E(X^2) - E(X.Y) = E(X - Y).E(X)$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) - E(X.Y) = [E(X) - E(Y)].E(X)$$

$$\Leftrightarrow E(X^2) - E(X.Y) = [E(X)]^2 - E(X)E(Y) \Leftrightarrow \underbrace{E(X^2) - [E(X)]^2}_{Var(X)} = \underbrace{E(X.Y) - E(X)E(Y)}_{Cov(X,Y)}$$

$$\Leftrightarrow Cov(X, Y) = Var(X)$$